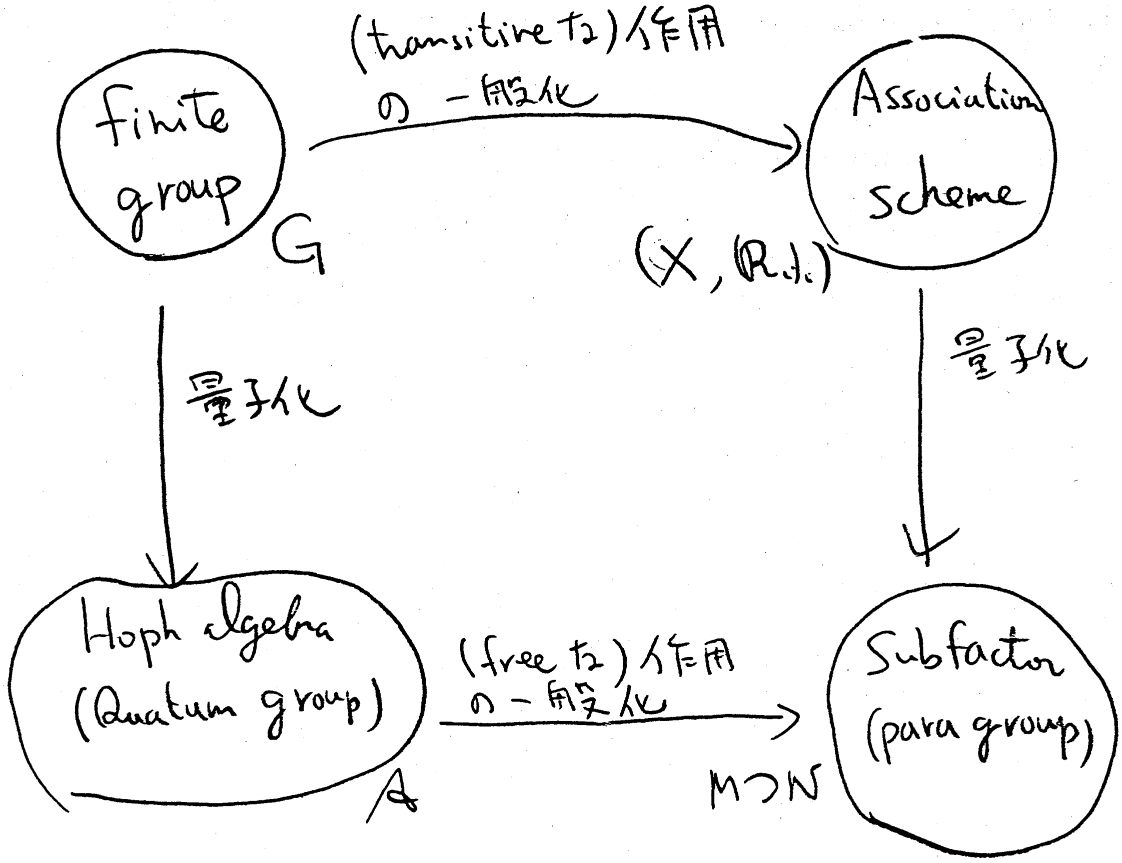
数理解析研究所講究録
840巻 1993年 20-31

Association scheme, Terwilliger algebras and Takesaki duality

北海道大学・理　綿谷 安男
(Yasuo Watatani)

0 はじめに

次の図式を考えてみよう。



有限群Gの有限集合Xへのtransitiveな作用を組み合わせ論的に一般化したのがAssociation scheme $(X, (R_i)_{0\le i\le d})$ だと考えよう。

さてこのフレーム全体を量子化してみると何ができるかを考えたい。(有限)群Gが量子化されたのが(有限次元)量子群Aだとしても、(有限)集合Xの量子化は何になるであろう。そしてその「作用」の量子化とは何であろうか?これらの問いに答えると自然に作用素環論のsubfactorの理論になるのである。

①作用素環

ヒルベルト空間H上の有界線型作用素全体をB(H)とする。B(H)の*-subalgebraで適当な位相について閉じたものを作用素環という。だから作用素環とはほぼ「無限次元の行列環」と思っていただいてよい。特にweak operator topologyについて閉じたものをvon Neumann環といい、operator norm topologyで閉じたものをC^*-環という。くわしいこと知りたいなら竹崎[6]やKadison-Ringrose[3]をみてもらうえ

なように。代数幾何学のレベルではよく知られているように，可換環 $\mathcal{A}$ と幾何学的空間 X は，双対の関係にあってお互いに他を規定している。幾何学的空間 X 上の座標関数のつくる可換環が $\mathcal{A}$ であるし，逆に可換環 $\mathcal{A}$ のスペクトラムとして X が再現できる。もっとも関数に要求するなめらかさの程度によって色んなカテゴリーがありえるが。

今 X を compact T_2 空間とし，$\mathcal{A}=C(X)$ を X 上の連続関数全体とする。すると $\mathcal{A}=C(X)$ は自然に可換な C^* 環になる。逆に 1 をもつ可換な C^* 環 $\mathcal{A}$ に対してある compact T_2 空間 X が存在して $\mathcal{A}$ は $C(X)$ と同型になる。この意味で

> **非可換な C^* 環は局所コンパクト空間の量子化だ.**

これはずっと昔に Gelfand-Naimark によって示された定理で別段新しいものではない。作用素環論は元々量子力学を扱う数学として生まれてきたところがあり，不思議でも何でもない。作用素環の創始者 von Neumann 以来のことだから.

次に $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし, $A = L^\infty(X, \mu)$ を X 上の本質的有界可測関数全体とする。すると $A = L^\infty(X, \mu)$ は自然に可換な von Neumann 環になる。逆に可換な von Neumann 環 A に対してある測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ が存在し, A は $L^\infty(X, \mu)$ と同型になる. この意味で

非可換な von Neumann 環は測度空間の量子化だ

2 Subfactors

有限群 G の有限集合 X への transitive な作用の組み合わせ論的一般化が Association scheme であった。この場合有限集合 X が幾何学的空間なのでそれを量子化して von Neumann 環 M をとろう。しかしこれではまだ G の「作用」を量子化することにはなっていない。それを定式化するんは Jones [2] により始められた subfactor の理論が必要になる。

Def von Neumann 環 M が <u>Factor</u> であるとはその中心 $Z(M)$ がスカラーのみからなることである。この時 M の σ-weak closed ideal は 0 か M になるという意味で

Mが「単純」であることと同値である。

Def von Neumann環Mが <u>II_1型 factor</u> とは

$\underset{def}{\Longleftarrow}$ ① Mは factor であって

② $\exists\, tr : M \longrightarrow \mathbb{C}$ traceとよばれる正の汎関数

$$\text{s.t.} \begin{cases} tr(xy) = tr(yx) & \forall x, y \in M \\ tr(1) = 1 \end{cases}$$

例 $M = \left(\bigotimes_{i=1}^{\infty} A_i\right)''$, $A_i \cong M_2(\mathbb{C})$

と 2×2行列環 $M_2(\mathbb{C})$ の無限個のテンソル積をtraceによるGNS表現した空間でσ-weakly closureをとったもの. は hyperfinite とよばれる II_1型 factorになる

Def 1つの II_1型 factor Mだけではなく, その中の subfactor N の Mへの包含関係 $N \subset M$ を考える。この時 Jones の index

$$[M:N] \underset{def}{=} \dim_N L^2(M) \quad (\text{coupling constant})$$

は大体 M をN-module とみた時の module 次元ではあるが 値を $[0,\infty]$ にとることに注意する.

$\boxed{\text{Theorem}}$ (Jones) II_1-factor M の subfactor $N \subset M$ の Jones index $[M:N]$ のとりうる値は $\{4\cos^2\frac{\pi}{n} \mid n=3,4,5,\cdots\} \cup [4,\infty)$ である.

$\boxed{3}$ Association scheme と subfactor

上の有名な定理以降 subfactor の理論は驚く程発展した。$[M:N] \leqq 4$ の分類, paragroup, 自己同型の分類等色んな話があるが, 幸崎氏や河東氏がどこかで色々書いているのでそれらをみてもらうことにする。ここでは Association scheme との関連する所のみを考える.

有限群 G の有限集合 X への transitive な作用の組み合わせ論的一般化が Association scheme であった。それを量子化すると subfactor $N \subset M$ になるのである。それを例でもって検証しよう.

$\boxed{例}$ G : 有限群

N : II_1-factor

$\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, N$: outer action

$M = N \rtimes_\alpha G$ (接合積) i.e. N を係数にもつ G 上の群環に α でひねった積を入れたもの

M は II_1-factor になり, N はその subfactor で

Jones index $[M:N] = G$

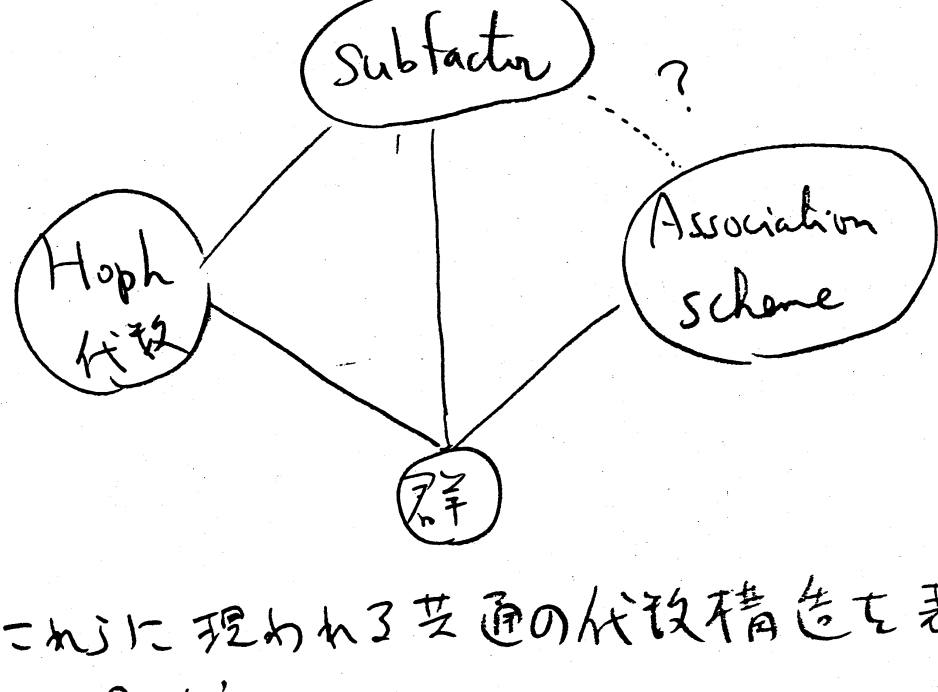
$\boxed{例}$ 有限群Gが有限集合Xにtransitiveに作用しているとする。この時Gはvon Neumann環 $\ell^\infty(X)$ に自然に作用する。これを使って適当なouter作用により

$$\begin{cases} M = (R\otimes \ell^\infty(X)) \rtimes G \\ \cup \\ N = R \qquad\qquad \rtimes G \end{cases}$$

（ここでRは hyperfinite II_1-factor）

と接合積をつくる，するとMは II_1-factor になり $N\subset M$ はそのsubfactorになる。この時後で示すが，対応するAssociation schemeのBose-Mesner algebraの構造が $N\subset M$ から読みとれることができるのである。

以上みてきたように有限群Gを拡張する方向は色々あった



そこでこれらに現われる共通の代数構造を表にして眺めてみよう。

	群 G	Hopf代数 A	Association scheme とそのBose-Mesner代数 A
積	$m: G\times G \to G$ $(x,y)\mapsto xy$	$m: A\otimes A \longrightarrow A$ product $\Delta: A \longrightarrow A\otimes A$ co-product	$m: A\otimes A \longrightarrow A$ matrix product $A\cdot B$ $\mu: A\otimes A \longrightarrow A$ Hadamard product $A\circ B$
単位元	単位元 $1\in G$	$\eta: \mathbb{C} \longrightarrow A$ unit $\varepsilon: A \longrightarrow \mathbb{C}$ co-unit	$I=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$ は行列積のunit $J=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ はアダマール積のunit $Tr: A \longrightarrow \mathbb{C}$ は$\cdot$のco-unit $\varepsilon: A \longrightarrow \mathbb{C}$ は$\circ$のco-unit ここで $Tr(A)=\sum_{i=1}^{n} A_{i,i}$ $\varepsilon(A)=\sum_{i,j}^{n} A_{i,j}$
逆元	$S: G \longrightarrow G$ $g \longmapsto g^{-1}$	$S: A \longrightarrow A$ antipode は 次をみたす $A \xrightarrow{\Delta} A\otimes A \xrightarrow{S\otimes id} A\otimes A \xrightarrow{m} A$ $A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C} \xrightarrow{\eta} A$	$S: A \longrightarrow A$ 転置 $S(A)=A^t$ は 次をみたす $A \xleftarrow{\mu} A\otimes A \xrightarrow{S\otimes id} A\otimes A \xrightarrow{m} A$ $A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C} \xleftarrow{Tr} A$ つまり $\varepsilon(\overline{B}\circ A)=Tr(B^{*}A)$ $\Leftrightarrow \varepsilon(B\circ A)=Tr(B^{t}A)$

実はsubfactor $N\subset M$の場合にも同様なものがある。

$\boxed{\text{Def}}$ (Ocneanu [4])

M: II_1-factor

$N\subset M$: subfactor

$[M:N]<\infty$ で $N'\cap M=\mathbb{C}$ と仮定する

$e_N: L^2(M,tr)\longrightarrow L^2(N,tr)$: Jones projection

$\langle M, e_N\rangle$ を Mとe_NでつくられたII_1-factor (basic 構成)

$\mathcal{A}=N'\cap\langle M,e_N\rangle=\{x\in\langle M,e_N\rangle \mid \forall n\in N\ xn=nx\}$

この$\mathcal{A}$には Association scheme の Bose-Mesner alg のように2つの積 $\cdot$ と $\circ$ が入いる

$$\begin{cases}\left(\sum_i a_i e_N b_i\right)\cdot\left(\sum_j c_j e_N d_j\right)=\sum_i\sum_j a_i E_N(b_i c_j)e_N d_j\\[2ex] \left(\sum_i a_i e_N b_i\right)\circ\left(\sum_j c_j e_N d_j\right)=\sum_i\sum_j \frac{1}{[M:N]}a_i c_j e_N d_j b_i\end{cases}$$

この時 Iは $(\mathcal{A},\cdot)$ の単位元になり

$J=[M:N]e_N$ は $(\mathcal{A},\circ)$ の単位元になる.

$\boxed{\text{例}}$ 群Gが有限集合Xにtransitiveに作用しているとき それからつくられたAssociation scheme $(X,(R_i)_i)$の Bose-Mesner algebra $\mathcal{A}$ の2つの積 $\cdot$ と $\circ$ は, 対応するII_1-型factor $M=(R\otimes\ell^\infty(X))\rtimes G$ とそのsubfactor $N=R\rtimes G$ からつくられた $\mathcal{A}=N'\cap\langle M,e_N\rangle$ での上の2つの積 $\cdot$ と $\circ$ と対応する

また Jaeger が講演で述べていた spin model と Association scheme の所にでてくる色んな関係式，例えば $\boxed{AJ = JA = \varepsilon(A) J}$ $(A \in \mathcal{A})$ は subfactor $N \subset M$ の設定でも意味があり，この例では，それは Jones projection e_N との関係式 $\boxed{x e_N = e_N x = \varepsilon(x) e_N}$ $(x \in \mathcal{A})$ となりここでも成立している。これは言いかえると Jones projection e_N が relative commutant algebra $\mathcal{A} = N' \cap \langle M, e_N \rangle$ の中で minimal かつ central な projection であるという事実に対応している。（ただし $N' \cap M = \mathbb{C}$ の時だが）

④ 竹崎の双対定理と Terwilliger algebra

局所コンパクトアーベル群 G があればその dual group $\hat{G}$ が存在してまた局所コンパクトアーベル群になり，そこではポントリャーギンの双対定理 $\hat{\hat{G}} \cong G$ が成立し，2回 dual をとると元にもどる。さて Hopf 代数や Association scheme の Bose-Mesner alg でもよく似た duality は存在している。では作用素環の場合にはどうかというのが次の竹崎の双対定理である

$\boxed{\text{Theorem}}$ (竹崎 [5])

Mをvon Neuman環, Gを局所コンパクトアーベル群, $\alpha: G \to \mathrm{Aut}\, M$ をactionとする. その接合積 $M \rtimes_\alpha G$ 上にはさらに $\hat{G}$ のaction $\hat{\alpha}: \hat{G} \to \mathrm{Aut}(M \rtimes_\alpha G)$ が存在し

$$(M \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} \cong M \otimes B(L^2(G))$$

このように2回接合積をとると $B(L^2(G))$ を除いて元のMを復元する。ここで余りの $B(L^2(G))$ は実はGと $\hat{G}$ の交換関係からつくられるalgebraになっている。これはsubfactorの場合にも対応するものが存在し, 2回basic構成をすると

$$\langle\langle N, e_N\rangle, e_M\rangle \cong N^{([M:N])}$$

ここでもし $n=[M:N]$ が整数なら $N^{(n)} \cong N \otimes M_n(\mathbb{C})$ である. この時 $B(L^2(G))$ に対応するのが

$$N' \cap \langle M, e_N\rangle \text{ と } M' \cap \langle\langle M, e_N\rangle, e_M\rangle$$

でつくられたalgebraである。群Gがtransitiveに有限集合Xに作用する場合につくられた特別なsubfactor $N \subset M$ の場合には, ちょうどこれが対応するAssociation schemeのTerwilliger algebra [7]と一致する。それ以上のことはまだよくわからないが何か面白そうである。

Reference

[1] E. Bannai and T. Ito, Algebraic Combinatrics I, Association scheme, Benjamin, 1984

(2) V. Jones, Index for subfactors, Invent. Math. 72 (1983), 1-25

(3) R. Kadison and J. Ringrose, Fundamental of the Theory of Operator Algebras, Academic Press 1986

(4) A. Ocneanu, Quantum symmetry, differential geometry of finite graphs and classification of subfactors, University of Tokyo Seminary Note 45, (1991)

[5) M. Takesaki, Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III, Acta Math. 131, (1973) 249-310

(6) M. Takesaki, Theory of Operator algebra I, Springer-Verlag, (1979)

(7) P. Terwilliger, The constituent algebra of an association scheme, preprint